



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „Adolf Haimovici”

Etapa locală, 25 februarie 2023

Clasa a IX-a

1.FeladatHasonlítsátok össze az x és y értékeit.

$$x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{2023}-\sqrt{2022}}{\sqrt{2022 \cdot 2023}} \quad \text{și} \quad y = \frac{\sqrt{2023} + \sqrt{2022}}{\sqrt{2021} + \sqrt{2022}}$$

2.FeladatSzámítsátok ki az $S = 1 + 2023 + 2023^2 + \dots + 2023^n$ összeget és igazoljátok, hogy $(2023^n - 1) : 2022, \forall n \in \mathbb{N}^*$.MEGJEGYZÉS: A $:$ jelet „osztható”-nak olvassuk.**3.Feladat**a) Ha tudjuk, hogy a, b, c egy számtani haladvány három egymás után következő tagja, akkor igazoljátok, hogy $b+c, a+c$ és $a+b$ is számtani haladványt alkot.b) Legyen x az $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x-2| \leq 3\}$ halmaz egy eleme. Határozzátok meg az x értékét, ha tudjuk, hogy $x-1, 2x+3, 3x+7$ egy számtani haladvány három egymás után következő tagja.**4.Feladat**

Az ABCD négyzetben legyen M az AB oldal és N a BC oldal felezőpontja.

a) Bontsátok fel az \overrightarrow{AN} és \overrightarrow{CM} vektorokat az \overrightarrow{AB} és \overrightarrow{AD} vektorok segítségével.b) Vizsgáljátok az $\vec{u} = 3\overrightarrow{AN} + 6\overrightarrow{CN}$ és $\vec{v} = -\overrightarrow{AD}$ vektorok kollinearitását?**Munkaidő 3 óra.****Sok sikert!**



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „Adolf Haimovici”

Etapa locală, 25 februarie 2023

Clasa a X-a

1.Feladat

Számítsátok ki:

a) $15 - 5\sqrt[3]{0,125}$ b) $2 \cdot \log_2 3 + 3 \cdot \log_2 10 - \log_2 1125$ c) $2023^{\log_{2023} 5} - \log_{2023} 2023^5$

2.Feladat

a) Határozzátok meg az $\frac{x}{y}$ értékét, ha tudjuk, hogy $2\lg(x-12y) = \lg x + \lg y$, ahol $x > 12y > 0$.

b) Számítsátok ki az $a = \log_3^2 9 + \log_{\frac{1}{4}} 2$ szám négyzetét.

3.Feladat

a) Számítsátok ki: $i^{2023} + i^{-2023} + (1+i)^{20}$

b) Oldjátok meg a következő egyenletet a komplex számok halmazán: $(1-z)(2z-1) = z^2$

4.Feladat

Adottak a következő függvények: $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2023^x$, $g: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $g(x) = \log_{2023^{-1}} x$,
 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$.

a) Az adott három függvény közül melyik növekvő?

b) Az adott három függvény közül melyik páros?

c) Az adott három függvény közül melyik csökkenő?

d) Az adott három függvény közül melyik alulról korlátos?

e) Az adott három függvény közül melyik periodikus?

f) Készítsétek el valamelyik függvény grafikus képét!

Munkaidő 3 óra

Sok sikert!



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „Adolf Haimovici”

Etapă locală, 25 februarie 2023

Clasa a XI-a

1.Feladat

a) Igazoljátok, hogy bármely $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix esetén teljesül a következő összefüggés:

$$X^2 - (a + d)X + (\det X) \cdot I_2 = O_2.$$

b) Határozzátok meg az $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixot, ha tudjuk hogy $X^{2023} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2.Feladat

Adott az $A_k = \begin{pmatrix} 3 & 2k - 1 \\ 3^k & k^2 \end{pmatrix}$ mátrix. Számítsátok ki: $S = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{100}$.

3.Feladat

Tudva, hogy $a, b \in \mathbb{R}^*$ és $a + b = \pi$, számítsátok ki:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(ax+bx)}{(ax+bx)^2 - \pi^2}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(ax+b)}{x-1}$.

4.Feladat

Adott az $f: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x+1}$ függvény. Határozzátok meg az a és b értékét, ha tudjuk, hogy az $y=x+2$ egyenletű egyenes a függvény ferde aszimptotája a végtelenben és a $P(2,5)$ pont rajta van a függvény grafikus képén.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „Adolf Haimovici”

Etapa locală, 25 februarie 2023

Clasa a XII-a

1.Feladat

Adott a $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 + 2x & 4x \\ -x & 1 - 2x \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\}$ halmaz.

- Igazoljátok, hogy $A(x)A(y) = A(x + y), \forall x, y \in \mathbf{R}$.
- Számítsátok ki $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^n, n \in \mathbf{N}^*$.

2.Feladat

Az $A = [0, 2]$ halmazon értelmezzük az $x * y = \frac{4x+4y}{4+xy}, x, y \in A$ műveletet.

- Igazoljátok, hogy a művelet asszociatív.
- Ellenőrizték, hogy ha $x, y, z \in A$ és $x * z = y * z$, akkor $x=y$.
- Határozzátok meg az $x \in A$ értékét, ha tudjuk, hogy $x * x * x = 0$.

3.Feladat

Adott az $I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx, n \in \mathbf{N}^*$.

- Számítsátok ki I_0 és I_1 .
- Fejezzétek ki az I_n sorozatot az I_{n-1} függvényében.

4.Feladat

Mutassátok ki, hogy léteznek az a, b, c valós számok ha $F(x) = (ax^2 + b) \cos x + cx \sin x$, az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 \sin x$ függvény primitív függvénye.